1.4.3. Sabitlerin (Parametrelerin) Değişimi Yöntemi

Önceki bölümlerde $L(D)y = B(x)$ denkleminin özel çözümlerinin $B(x)$'in belirli fonksiyon durumları için nasıl bulunduğunu veren yöntemler incelendi. Bu kısımda $B(x)$'e bağlı olmayan özel çözüm bulma yöntemini vereceğiz. Bu yönteme parametrelerin değişimi veya Lagrange yöntemi denmektedir. Bu yöntem $L(D)y = B(x)$ denklemine ait $L(D)y = 0$ homojen lineer denklemin n tane lineer bağımsız çözümünün (dolayısıyla genel çözümünün) bilinmesi halinde $L(D)y = B(x)$ denkleminin bir özel çözümünün bulunmasında etkilidir.

Teorem 16: $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $L(D)y=0$ homojen denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. $v_1, v_2, \dots, v_n$ fonksiyonları I üzerinde sıfır olmayan ve

$$\left.\begin{aligned} v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) + \dots + v_n'(x)y_n(x) &= 0 \\ v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) + \dots + v_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ v_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + v_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + v_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= B(x) \end{aligned}\right\} \dots (17)$$

eşitliklerini sağlayan fonksiyonlar ise $L(D)y=B(x)$ denkleminin özel çözümü

$$y_ö = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \dots + v_n(x)y_n(x) \quad \dots (18)$$

ile verilir.

İspat: Öncelikle (18) ile tanımlanan $y_ö$ fonksiyonunun $L(D)y=B(x)$ denklemini sağladığını (çözüm olduğunu) gösterelim. $y_ö$ nın ardışık türevlerini alarak ve her adımda (17) eşitliklerini kullanarak

$$y_ö' = v_1 y_1' + v_2 y_2' + \cdots + v_n y_n'$$

$$y_ö'' = v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + \cdots + v_n y_n''$$

$$\vdots$$

$$y_ö^{(n-1)} = v_1 y_1^{(n-1)} + v_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n y_n^{(n-1)}$$

$$y_ö^{(n)} = v_1 y_1^{(n)} + v_2 y_2^{(n)} + \cdots + v_n y_n^{(n)} + B(x)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler $L(D)y = B(x)$ de yerine konursa

$$L(D) y_ö = v_1 L(D) y_1 + v_2 L(D) y_2 + \cdots + v_n L(D) y_n + B(x)$$

olur. $i=1,2,\ldots,n$ için y_i ler $L(D)y=0$ denkleminin çözümleri olduğundan $L(D)y_ö = B(x)$ elde edilir. O halde $y_ö$, $L(D)y=B(x)$ denkleminin bir özel çözümüdür.

Şimdi de (17) eşitliklerini sağlayan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ fonksiyonlarının varlığını gösterelim. (17) sistemi $v_1', v_2', \ldots, v_n'$ bilinmeyenli bir lineer denklem sistemidir ve katsayılar determinantı $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x)$ olup y_i ler lineer bağımsız olduğundan

$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ dır. Dolayısıyla sistemin tek bir çözümü vardır. Bu çözüm de

$$v_1' = f_1(x), \quad v_2' = f_2(x), \ldots \; v_n' = F_n(x)$$

şeklinde ise buradan integral alınarak

$$v_1 = \int f_1(x)dx, \quad v_2 = \int f_2(x)dx, \; \ldots \; v_n = \int f_n(x)dx$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $L(D)y = B(x)$ denkleminin özel çözümü

$$y_0^{ö} = y_1 \cdot \int f_1(x)dx + y_2 \int f_2(x)dx + \cdots + y_n \int f_n(x)dx$$

dur.

Not 1: Bu yöntem hem sabit katsayılı hem de değişken katsayılı homojen olmayan tüm lineer denklemlere uygulanabilir.

2: Özel çözüm keyfi sabit içermeyeceği için $v_1', v_2', \ldots, v_n'$ fonksiyonlarının integralinden gelen integral sabitleri (keyfi sabitler) fonksiyonlara katılmamıştır.

Örnek: $y''' + y' = \sec x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

$\ell(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \mp i$ olup

$y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ dur.

özel çözüm $y_ö = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) + v_3(x) y_3(x)$

$= v_1 . 1 + v_2 . \cos x + v_3 . \sin x$

formunda sabitin değişimi ile ararsa;

$$\left.\begin{aligned} v_1' + v_2' \cos x + v_3' \sin x &= 0 \\ -v_2' \sin x + v_3' \cos x &= 0 \\ -v_2' \cos x - v_3' \sin x &= \sec x \end{aligned}\right\}$$

v_1', v_2', v_3' bilinmeyenlerine bağlı denklem sistemi elde edilir. Cramer yöntemi ile çözüm bulunabilir. Şöyleki

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$$ olmak üzere

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \sec x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\cos^2 x \sec x + \sin^2 x \sec x}{1} = \sec x$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \sec x & -\sin x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-\sec x \cdot \cos x}{1} = -1$$

$$v_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \sec x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-\sin x \sec x}{1} = -\tan x$$

$$v_1' = \sec x \Rightarrow v_1(x) = \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$v_2' = -1 \Rightarrow v_2(x) = \int -1\,dx = -x$$

$$v_3' = -\tan x \Rightarrow v_3(x) = \int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x|$$

$\Rightarrow y_ö = \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \ln(\cos x).\sin x$ olarak bulunur.

$y = y_h + y_ö = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x . \ln(\cos x)$

genel çözümdür.

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ olup

$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ şeklindedir.

$y_ö = v_1(x) e^x + v_2(x) e^{2x}$ şeklinde sabitin değişimi yöntemi ile aranırsa

$$\left.\begin{aligned} v_1' e^x + v_2' e^{2x} &= 0 \\ v_1' e^x + 2 v_2' e^{2x} &= \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan

$v_1' = -\dfrac{e^x}{e^x + 1}$, $v_2' = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ bulunur. İntegral alınırsa

$$v_1' = \frac{e^x}{e^x + 1} \Rightarrow v_1(x) = -\ln(e^x + 1)$$

$$v_2' = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \Rightarrow v_2(x) = -\ln(1 + e^{-x})$$ dur.

Buna göre

$$y_ö = v_1(x)e^x + v_2(x)e^{2x}$$
$$= -e^x \ln(e^x+1) - e^{2x}\ln(1+e^{-x}) \quad \text{olur.}$$

Genel çözüm

$$y = y_h + y_ö$$
$$= c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^x \ln(e^x+1) - e^{2x} \ln(1+e^{-x})$$

olarak bulunur.